

# Grandeurs et mesures

→ **Une grandeur** est un caractère d'un objet susceptible de varier d'un objet à l'autre. (caractéristique physique, chimique ou biologique qui est mesurée ou repérer).

→ **La mesure de la grandeur** d'un objet est le nombre d'unités nécessaire permettant de réaliser une grandeur égale à celle de l'objet. La mesure est un nombre ; elle dépend de l'unité choisie, contrairement à la grandeur qui est invariante.

## 1. Une grandeur d'un objet est défini par deux relations qui lient ces objets :

- Une relation d'égalité qui permet d'établir que deux objets ont la même grandeur
- Une relation d'inégalité qui permet d'établir qu'un objet est plus « grand » qu'un autre

## 2. Pour un même objet, on peut définir plusieurs grandeurs

3. On peut comparer des grandeurs d'objets par **comparaison directe** mentalement ou expérimentalement à partir de la définition de la grandeur, ou par **comparaison indirecte en utilisant un objet intermédiaire** ou **une transformation licite** (découper / recoller)

4. **On peut définir une grandeur sans avoir recours aux nombres** → *mais pas toujours utilisables soit parce qu'elles sont irréalisables soit très lourdes à mettre en oeuvre. C'est à ce moment là qu'on utilise le **mesurage**.*

## → A L'ECOLE :

### • La longueur

« Deux surfaces A et B ont même aire » **signifie** « A et B sont superposables » (éventuellement après découpage et recollement des morceaux)

### • L'aire (surfaces)

« Deux surfaces A et B ont même aire » **signifie** « A et B sont superposables » (éventuellement après découpage et recollement des morceaux)

### • Les masses (objets physiques)

« A a même masse que B » **signifie** « A équilibre exactement B sur une balance Roberval »

### • Le volume

« A a même contenance que B » **signifie** « A se transvase exactement dans B »

### • La durée (laps de temps)

**La comparaison des laps de temps du point de vue de la durée se fait à l'aide d'instruments.**

✓ *Les angles sont comparés par superposition, mais ne sont pas mesurés à l'école.*

## → DEUX TYPES DE GRANDEURS :

↳ **Grandeurs repérables** : **Grandeurs pour lesquelles on peut constater l'égalité et qu'on peut ordonner.**

Exemple : la température, la date..

Certaines ne sont pas mesurables : la température, **l'heure n'est pas une unité de mesure si elle indique un temps dans la journée (mais les durées sont mesurables en heures)**

↳ **Grandeurs mesurables** :

- **Grandeurs qui ont les propriétés précédentes et pour lesquelles l'addition et la multiplication par un nombre ont un sens.** Exemple : la longueur, la masse, le volume, la durée, l'air..
- Les mesures sont des nombres réels toujours positifs
- La mesure de « rien » est nulle
- La mesure de la « réunion » de deux objets est la somme des mesures de chacun

✓ Différence entre durée et instant : Quand on dit 3h30 cela peut être la durée d'un film mais aussi l'heure à un instant donné.

## ❖ PROGRESSION GÉNÉRIQUE D'APPRENTISSAGE

Pour toutes les grandeurs, la progression doit être la suivante :

- **Estimation perceptive** (vigilance du travail avec les mots)
- **Comparaison directe**
- **Comparaison indirecte** (avec un objet intermédiaire mais pas encore dans la mesure)
- **Mesures avec un étalon arbitraire** (un objet x le nombre de fois « reporter »)
- **Mesures avec les unités usuelles**

→ Dans chaque étape on a un problème / une situation

### 1. Comparaison directe des objets (sans mesurage)

Un exemple type « *ridicule* » : On ne donne pas d'intérêt au fait de mesurer !

On donne aux élèves un très grand stylo et un très petit stylo avec la consigne suivante : Mesurer le stylo pour savoir quel est le plus grand.

### 2. Comparaison indirecte des objets (avec un objet intermédiaire ou un instrument)

→ Avec un étalon mais pas de report régulier d'une unité

→ Ou avec une balance

→ Ou à l'aide de relations de grandeurs

### 3. Mesurage (avec un étalon arbitraire : combien de fois cet objet x rentre PUIS avec des mesures)

• **DENOMBRER** : Reporter l'étalon (représentant matériel de l'unité) et dénombrer les reports.

• **MESURER A L'AIDE D'UN INSTRUMENT OU ON LIT**

La règle est une suite de segments de longueurs l'unité 1 cm mis bout à bout, les nombres de la graduation n'aidant qu'à leur dénombrement.

• **LIRE DIRECTEMENT LE NOMBRE-MESURE SUR UN INSTRUMENT DE MESURE**

### 4. Calcul (voir didactique du premier semestre, regroupement des nombres, retenue..)

Calculer la mesure à partir d'autres mesures, en utilisant éventuellement une formule.

Les opérations sur les grandeurs sont menées en lien avec l'avancée de la connaissance sur les nombres, de celle des opérations sur les nombres, de la connaissance des unités et des relations entre elles.

## ➡ LE LEXIQUE DES GRANDEURS :

**De nombreuses sources de confusions, d'erreurs...**

Exemple : hauteur, altitude, dénivelé, circonférence, profondeur, périmètre, taille, tour, distance > Un seul et même concept de mathématiques → Le domaine des longueurs.

**5. Conversion** : le tableau de conversion n'est plus utilisable à l'école primaire mais sera utilisé au collège, toutes les conversions doivent donner lieu à une compréhension des regroupements par 10 (ou pour les heures par 60).

## ❖ TYPOLOGIE DES PROBLEMES

### A. Comparer des longueurs sans les mesurer

#### ➔ Comparer des longueurs de segment sans mesurer (longueur d'objet « rectilignes »)

1. L'élève procède à **vue d'oeil** si les longueurs sont très différentes
2. L'élève **fait coïncider les deux extrémités des segments** si les objets sont facilement transportables
3. L'élève utilise **un objet intermédiaire transportable** ou **reporte la longueur du 1<sup>er</sup> objet sur le 2<sup>e</sup>** avec un compas ou un objet unité (ou plusieurs) si les objets ne sont pas facilement transportables.
4. L'élève utilise **un objet intermédiaire ou reporte un objet unité** si les segments ne sont pas transportables (ex : tracés dans la cour)

VARIABLES	DIFFICULTES
<ul style="list-style-type: none"><li>• Objet transportable ou non</li><li>• Différence des grandeurs importantes ou non</li><li>• Matériel fourni</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Les élèves sont non conservants (si 2 longueurs sont superposées et égales, ils le voient, mais si on décale l'une des deux longueurs, ils pensent qu'elles ne sont plus égales)</li><li>• Difficulté de manipulation (précision)</li></ul>

#### ➔ Comparer des longueurs de lignes brisées et des périmètres non déployables

1. Si l'élève dispose d'un compas, il **reporte sur une demi-droite les longueurs des segments** qui composent la ligne brisée ou le périmètre.
2. Si l'élève dispose d'objets intermédiaires qu'il peut couper à la longueur qu'il veut, il **les superpose sur chacun des segments de la ligne brisée**, puis aligne les objets bout à bout.

VARIABLES	DIFFICULTES
<ul style="list-style-type: none"><li>• Les différents segments qui composent la ligne brisée sont égaux ou non</li><li>• Matériel fourni</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• L'élève ne voit pas le lien entre le compas et la comparaison (un compas sert seulement à tracer un cercle..)</li><li>• Théorèmes élèves « la ligne brisée la plus longue est celle qui contient le plus de segments »</li><li>• Difficultés de manipulation</li></ul>

### B. Comparer des longueurs en les mesurant

#### ➔ Comparer des longueurs de segment avec un double-décimètre

1. L'élève place une **extrémité de l'objet sur le 0 de la graduation** de son instrument de mesure et **lit à quelle graduation arrive l'autre extrémité de l'objet**. Si longueur est supérieure à celle de la règle, il doit reporter le double-décimètre.

VARIABLES	DIFFICULTES
<ul style="list-style-type: none"><li>• Nature du rapport entre la longueur et les unités (cm et mm)</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• L'élève place l'extrémité de l'objet sur le début de la règle (erreur qui vient de l'utilisation de gabarits)</li><li>• L'élève n'arrive pas à donner de résultat si la mesure n'est pas un nombre entier</li><li>• Erreur dans la lecture des mm (l'élève lit « vers l'arrière »)</li><li>• L'élève est bloqué s'il faut reporter la règle</li><li>• L'élève oublie d'ajouter les longueurs obtenues</li><li>• Difficultés de manipulation</li></ul>

## → Mesurer la longueur d'une ligne brisée ou le périmètre d'une figure avec un double-décimètre

1. L'élève mesure les longueurs de chacun des segments et additionne ces longueurs. Il peut utiliser la multiplication si ces segments sont de même longueur.

VARIABLES	DIFFICULTES
<ul style="list-style-type: none"><li>• Mesure de chaque segment (nombre entier ou pas)</li><li>• Nombre de segments qui composent la ligne brisée</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• L'élève ne fait pas le lien entre l'addition des mesures et la longueur totale de la ligne brisée</li><li>• Si les mesures de segments ne sont pas des nombres entiers, l'élève peut avoir des difficultés pour additionner les mesures</li><li>• Plus il y a de segments, plus le risque d'oubli et d'erreurs de calcul est important</li></ul>

## → Mesurer le périmètre d'un polygone par calcul

1. Si le polygone est un carré, un rectangle ou un polygone régulier, l'élève peut appliquer une formule ou utiliser un raisonnement.
  2. L'élève peut mesurer côté par côté et additionner ses mesures.
- Si la figure est un cercle, l'élève peut utiliser une ficelle ou une formule, si elle est connue.

VARIABLES	DIFFICULTES
<ul style="list-style-type: none"><li>• Mesure de chaque segment (nombre entier ou pas)</li><li>• Nombre de segments qui composent la ligne brisée</li><li>• Nature du polygone</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Mauvaise mémorisation de la formule (procédure 1)</li><li>• Confusion avec la formule de l'aire quand elle est connue (carré ou rectangle)</li></ul>

## → Effectuer des conversions d'unités de longueurs

1. Si l'unité du nombre de départ ou d'arrivée est familière et proche, l'élève multiplie ou divise par 10.
2. Si l'unités du nombre de départ ou d'arrivée n'est pas familière ou pas proche, l'élève utilise la multiplication ou la division par 10,100 ou un tableau de conversion (≈)

→ même cheminement pour les unités d'aire

VARIABLES	DIFFICULTES
<ul style="list-style-type: none"><li>• Unité du nombre de départ ou d'arrivée</li><li>• Unités familières et/ou proches ou non.</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Défaut de mémorisation de l'ordre des unités</li><li>• Méconnaissance des relations entre les différentes unités</li><li>• Si le nombre de départ ou le résultat est un nombre décimal, erreurs liées à l'écriture décimale des nombres et à la maîtrise des calculs (multiplication ou division par 10,100..)</li></ul>

## C. Comparer et mesurer des aires

### → Les surfaces données ont des aires très différentes ou non

1. L'élève fait une comparaison à vue d'oeil.

VARIABLES	DIFFICULTES
<ul style="list-style-type: none"><li>• Différence entre les aires visibles ou non</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• L'élève assimile aire et encombrement</li></ul>

### → Les surfaces données sont faciles à inclure l'une dans l'autre

1. Si les surfaces sont déplaçables, l'élève peut effectuer l'inclusion physiquement
2. Si les surfaces ne sont pas déplaçables, il doit effectuer l'inclusion mentalement

VARIABLES	DIFFICULTES
<ul style="list-style-type: none"><li>• Surfaces déplaçables ou non</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• L'élève est tenter de fermer les figures concaves (angle rentrant) pour comparer leur aire.</li></ul>

### → Les surfaces données peuvent être incluses l'une dans l'autre suite à un découpage /recollement

1. Si l'élève a des ciseaux, il fait le découpage.
2. Si l'élève a un crayon et une règle, il trace les transformations sur sa feuille.
3. S'il ne dispose pas d'instrument, il effectue ces transformations mentalement.

VARIABLES	DIFFICULTES
<ul style="list-style-type: none"><li>• Instruments donnés à l'élève</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Difficulté à anticiper les tracés, découpages et reconstitutions nécessaires</li><li>• Difficulté à mobiliser des images mentales</li></ul>

### → Les surfaces données ne peuvent pas être incluses l'une dans l'autre

1. Si ce sont des figures usuelles, l'élève calcule l'aire des surfaces (formules) et compare les résultats
2. Si ces surfaces peuvent se ramener à la réunion ou au complémentaire de surface usuelles, l'élève les met en évidence
3. Si aucune de ces deux procédures n'est possible, l'élève trace un quadrillage et calcule approximativement les aires

VARIABLES	DIFFICULTES
<ul style="list-style-type: none"><li>• Nature des surfaces</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Problèmes de mémorisation des formules</li><li>• Erreurs de calcul</li><li>• Difficulté dans la décomposition de la figure</li><li>• Difficulté pour tracer le quadrillage</li><li>• Difficulté à dénombrer les carreaux</li></ul>

#### QUELQUES VARIABLES DIDACTIQUES DE BASE A CONNAITRE :

- Le nombre de grandeurs associables à l'objet
- Le type d'objets à comparer ou à mesurer (objets de la vie courante, ou objets mathématiques, matériaux etc..)
- L'accessibilité des objets (réel ou non, présent ou non, déplorable ou pas, diverses représentations, divers support : papier uni, quadrillé, pointé), distance des objets à comparer (l'éloignement favorise le passage à la mesure)
- La forme des objets
- La taille, l'ordre de grandeur de l'objet à mesurer par rapport à l'unité
- Le matériel à disposition

## D. Autre grandeurs

### • Masses

Comparer les masses sans recourir à des mesures : en soupesant ou en utilisant une balance

Mesurer la masse d'un objet avec une balance : balance Roberval ou balance électronique

Effectuer des conversions d'unités de masse

Résoudre des problèmes avec des unités de masse : comparaison, addition, soustractions, multiplication par un entier.

### • Capacité / volume

Comparer des capacités/volumes sans recourir à des mesures : à vue d'oeil, en transvasant, en comparant des masses solides (s'il s'agit de solides homogènes). Noter que les enfants n'ont pas encore atteint l'étape de la conservation de la substance.

Mesurer La capacité d'un récipient en utilisant un liquide

Mesurer un volume en remplissant avec un volume unité : remplir un pavé droit avec des petits cubes identiques.

Calculer le volume d'un pavé droit en utilisant une formule : c'est la seule formule à apprendre en élémentaire

Effectuer des conversions d'unités de contenance

### • Durée

Lire l'heure sur une horloge à aiguille (heure et minutes)

Convertir des unités de durée

Résoudre des problèmes liant horaires et durées : on donne l'heure de départ puis la durée et on doit trouver l'heure de fin ou l'inverse. L'élève peut procéder par calcul de proche en proche ou par soustraction mais attention : **les durées et les heures sont souvent confondues avec les nombres décimaux !**

Résoudre des problèmes utilisant des calculs sur des durées.

#### QUELQUES DIFFICULTES DE BASE A CONNAITRE :

→ **De report de l'étalon** : souvent dues à la **simultanéité de plusieurs tâches**  
*Manipulation de l'étalon, mémorisation de la partie de l'objet déjà prise en compte et comptage du nombre de reports.*

→ **Pour trouver une décomposition pertinente de l'objet en « sous objets plus élémentaires »** (par exemple, décomposer une surface en plusieurs surfaces pour appliquer la technique de découpage-recollement.)

→ **Dans le choix de l'unité appropriée à la grandeur**

→ **De conversion** (exemple : référence pour la masse c'est le kilogramme alors que c'est le gramme)

→ **Dans les comparaisons de grandeur**

• Difficulté à **mobiliser la propriété de transitivité de l'égalité** ou de la **relation d'ordre** (transitivité : relation entre 3 objets)

• **Comparer des nombres - mesures sans tenir compte de l'unité**

• **Comparer les unités sans tenir compte des nombres mesures** (2m > 330cm par exemple)

• **Comparaison d'une autre grandeur associée au même objet que celle à comparer** (c'est le plus lourd car le plus gros : ballon de baudruche énorme face à une boule de pétanque ou périmètre le plus petit car aire la plus petite)

→ **D'erreurs de calculs relatives à la maîtrise de la numération et aux techniques opératoires**

→ **De choix et de mises en oeuvre de formules** (exemple : prendre la dernière formule vue en classe en prenant les nombres qui apparaissent dans l'énoncé ou sur le dessin)

## ❖ Ce qu'en disent les programmes

→ Attendus de fin de cycle 1 :

- **Classer** ou **ranger** des objets selon un **critère de longueur ou de masse ou de contenance**

### ↳ REPERES DE PROGRESSIVITE

Très tôt, les enfants regroupent les objets en fonction :

- De leur aspect
- De leur utilisation familière ou de leurs effets

A l'école, ils sont incités à « **mettre ensemble ce qui va ensemble** » pour comprendre que tout objet peut appartenir à plusieurs catégories et que certains objets ne peuvent pas appartenir à celles-ci.

↳ par des **observations, comparaisons, tris**, les enfants sont amenés à mieux distinguer différents types de critères : **forme, longueur, masse, contenance essentiellement**.

→ Attendus de fin de cycle 2 :

- **Comparer, estimer, mesurer des longueurs, des masses, des contenances, des durées**
- **Utiliser le lexique, les unités, les instruments de mesure spécifiques de ces grandeurs :**

↳ Comparer des objets selon plusieurs grandeurs et identifier quand il s'agit d'une longueur, d'une masse, d'une contenance ou d'une durée

↳ Lexique spécifique associé

↳ Comparer des longueurs, des masses, des contenances en introduisant la comparaison à un objet intermédiaire ou par mesurage.

↳ Estimer les ordre de grandeurs de quelques longueurs, masses, contenances

↳ Vérifier éventuellement avec un instrument

↳ Mesurer des longueurs avec un instrument adopté (ex : en reportant une unité)

↳ Mesurer des masses et des contenances avec des instruments adaptés

↳ Encadrer une grandeur par deux nombres entiers d'unités

↳ Exprimer une mesure dans une ou plusieurs unités choisies ou imposées

↳ Comparer, estimer, mesurer des durées (unités de mesures usuelles et relations)

↳ Représenter une grandeur par une longueur sur une demi-droite graduée (dans des cas simples)

- **Résoudre des problèmes impliquant des longueurs, des masses, des contenances**

↳ Résoudre des problèmes, notamment de mesurage et de comparaison, en utilisant les opérations sur les grandeurs ou sur les nombres (opérations sur les grandeurs + utilisation de la monnaie)

↳ Résoudre des problèmes impliquant des conversions simples d'une unité usuelle à une autre

↳ Convertir avant de calculer si nécessaire (relations entre les unités usuelles)

→ **Attendus de fin de cycle 3 :**

- Comparer, estimer, mesurer des grandeurs géométriques avec des nombres entiers et des nombres décimaux : longueur (périmètre), aire, volume, angle
- Utiliser le lexique, les unités, les instruments de mesure spécifiques de ces grandeurs :

- ↳ Comparer des périmètres avec ou sans recours à la mesure
- ↳ Mesurer des périmètres en reportant des unités et des fractions d'unités, ou en utilisant une formule
- ↳ Comparer, classer et ranger des surfaces selon leurs aires sans avoir recours à la mesure
- ↳ Différencier aire et périmètre d'une surface
- ↳ Déterminer la mesure de l'aire d'une surface à partir d'un pavage simple ou en utilisant une formule
- ↳ Estimer la mesure d'une aire par différentes procédures (unités usuelles d'aire : multiples et sous-multiples de  $m^2$  et leurs relations ; formule de l'aire d'un carré, rectangle, triangle, disque)
- ↳ Relier les unités de volume et de contenance
- ↳ Estimer la mesure d'un volume par différentes procédures
- ↳ Déterminer le volume d'un pavé droit en se rapportant à un dénombrement d'unités ou en utilisant une formule (formule du volume d'un cube, d'un pavé droit)
- ↳ Identifier les angles dans une figure géométrique, comparer des angles, reproduire un angle donné en utilisant un gabarit, reconnaître qu'un angle est droit, aigu ou obtus, estimer la mesure d'un angle, estimer et vérifier qu'un angle est droit, aigu ou obtus.
- ↳ Utiliser un instrument de mesure (le rapporteur) et une unité de mesure (le degré) pour déterminer la mesure en degré d'un angle, construire un angle de mesure donnée en degrés.. (notion d'angle+lexique)

- Résoudre des problèmes impliquant des grandeurs (géométriques, physiques, économiques) en utilisant des nombres entiers et des nombres décimaux :

- ↳ Résoudre des problèmes de comparaison avec et sans recours à la mesure
- ↳ Résoudre des problèmes dont la résolution mobilise simultanément des unités différentes de mesure et/ou des conversions.
- ↳ Calculer des périmètres, des aires ou des volumes, en mobilisant ou non, selon les cas, des formules
- ↳ Calculer la durée écoulée entre deux instants donnés (unités de mesure usuelles)

**A savoir :**

Extrait du manuel Hermel → GOOD documents (travail de groupes..)

Extrait du manuel Cap math → S'inspire de Hermel

Extrait du manuel Euro maths (opération maths) → Plutôt bien aussi

**A retenir en plus :**

Théorème en acte / théorème élève

Notion de contrat didactique

Encombrement = Périmètre = « Longueur horizontale »