

## FRACTIONS — NOMBRES DECIMAUX

→ **L'étude des fractions et des nombres décimaux** commence au **CM1** et se poursuit pendant les premières années de collège.

→ A l'école primaire, **l'étude des fractions est limitée à des cas simples** et a essentiellement pour but d'**aider à la compréhension des nombres décimaux écrits avec une virgule**. Le calcul sur les fractions n'est pas envisagé en dehors de **l'addition de fractions de même dénominateur**.

→ **L'enseignement de la désignation des nombres décimaux avec une virgule** s'inscrit dans la **suite de celle de la numération décimale de position** pour les nombres naturels dont elle reprend les principes. **Certaines particularités** des nombres décimaux par rapport aux nombres entiers sont **mises en évidence**. Enfin, les élèves apprennent à **calculer avec les nombres décimaux**.

### CE QU'EN DISENT LES PROGRAMMES — CYCLE 3

« Les fractions et les nombres décimaux apparaissent comme de nouveaux nombres introduits pour pallier l'insuffisance des nombres entiers, notamment pour mesurer des longueurs, des aires et repérer des points sur une demi-droite graduée.

Les caractéristiques communes entre le système de numération et le système métrique sont mises en évidence.

L'écriture à virgule est présentée comme une convention d'écriture d'une fraction décimale ou d'une somme de fractions décimales. Cela permet de mettre à jour la nature des nombres décimaux et de justifier les règles de comparaison et de calcul. »

#### ATTENDUS DE FIN DE CYCLE 3

##### Utiliser et représenter les grands nombres entiers, des fractions simples, les nombres décimaux

→ **Comprendre et utiliser la notion de fractions simples :**

Écritures fractionnaires

Diverses désignations des fractions (orales, écrites et décompositions).

→ **Repérer et placer des fractions sur une demi-droite graduée adaptée :**

Une première extension de la relation d'ordre.

→ **Encadrer une fraction par deux nombres entiers consécutifs.**

→ **Etablir des égalités entre des fractions simples.**

→ **Comprendre et utiliser la notion de nombre décimal :**

Spécificités des nombres décimaux.

→ **Associer diverses désignations d'un nombre décimal : fractions décimales, écritures à virgule et décomposition :**

Règles et fonctionnement des systèmes de numération dans le champ des nombres décimaux, relations entre unités de numération (point de vue décimal), valeurs des chiffres en fonction de leur rang dans l'écriture à virgule d'un nombre décimal (point de vue positionnel).

→ **Repérer et placer des décimaux sur une demi-droite graduée adaptée.**

→ **Comparer, ranger, encadrer, intercaler des nombres décimaux :**

Ordre sur les nombres décimaux.

## Calculer avec des nombres entiers et des nombres décimaux.

Résoudre des problèmes en utilisant des fractions simples, les nombres décimaux et le calcul.

### REPERES DE PROGRESSIVITE

→ Les **fractions** sont à la fois objets d'étude et support pour l'introduction et l'apprentissage des nombres décimaux.

**CM1** : début de l'étude des fractions simples et des fractions décimales.

**Du CM1 à la 6ème** : différentes conceptions possibles de la fractions sont abordées, du partage de grandeur jusqu'au quotient de deux nombres entiers (6ème).

→ Pour les **nombres décimaux**, les activités peuvent se limiter aux centièmes en début de cycle pour s'étendre aux dix-millièmes en 6ème.

## TYPOLOGIE DES PROBLEMES POUR COMPRENDRE LES FRACTIONS ET LES NOMBRES DECIMAUX A L'ECOLE PRIMAIRE

DOMAINES	Insuffisance des nombres entiers naturels.	Apports des fractions et des nombres décimaux
1 — MESURE	→ La mesure d'une grandeur à l'aide d'une unité donnée s'exprime rarement par un nombre entier.	→ L'idée de fractionner l'unité, éventuellement plusieurs fois permet d'exprimer une mesure en n'utilisant qu'une seule unité.  → Le fractionnement de l'unité en 10, puis en 100 ... conduit aux fractions décimales et aux nombres décimaux.
2 — GRADUATION	→ Pour le repérage des points sur une ligne, les nombres entiers laissent beaucoup de « vide ».	→ L'idée encore, de fractionner chaque intervalle (par exemple en 10, en 100...) permet de repérer de nouveaux points de cette ligne à l'aide d'un nombre décimal.
3 — CALCUL	→ Certains calculs n'aboutissent pas à une réponse satisfaisante avec les entiers naturels. C'est en particulier le cas de la division : avec les nombres entiers on ne peut obtenir qu'un quotient entier et un reste.	→ Les fractions apportent une solution simple au problème : le quotient exact de 16 divisé par 3 est $\frac{16}{3}$ .  → Et les nombres décimaux permettent d'en donner une approximation.
4 - COMPARAISON		

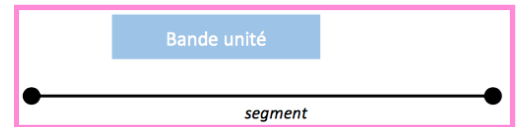
⚠ **Rappel** : Un nombre décimal est un nombre à virgule mais qui n'a pas un nombre infini de chiffres après la virgule. Il peut être positif ou négatif. Par exemple  $\frac{1}{2}$ , 12,45 et 0,415464 sont des nombres décimaux. Par contre, le nombre  $\frac{1}{3} = 0,3333333...$  n'est pas décimal, puisque qu'il a une infinité de 3 après la virgule.

## ❖ FRACTIONS ET NOMBRES DECIMAUX POUR EXPRIMER UNE MESURE

### ➔ Introduction des fractions à partir d'une bande d'unité :

« Les **fractions** sont **introduites** en **CM1** comme des outils pour **exprimer et communiquer des mesures** (de longueur, d'aire ...) **à partir d'une unité** (bande-unité, surface unité...), dans des cas où cette mesure ne s'exprime pas par un nombre entier d'unités. »

**EXEMPLE DE PROBLEME** : Deux élèves disposent de la même bande-unité. L'un des deux élèves doit permettre à l'autre de tracer un segment de même longueur que le segment  $[AB]$  à l'aide de la bande-unité (sans règle graduée).



<b>PROCEDURES</b>	<p>➔ <b>Report et comptage du nombre de reports</b> (si le segment = X fois la bande-unité, X étant un nombre entier).</p> <p>➔ <b>Report de la bande-unité puis pliage en 2 ou en 4</b> pour trouver le nombre d'unités restantes (ex: le segment = 1 fois la bande unité + 3/4 de la bande unité, la fraction 3/4 signifiant qu'on a pris 3 fois le quart de la bande-unité qui était pliée en 4).</p> <p>↳ Les élèves peuvent être déstabilisés dans le cas particulier où la longueur de la bande unité serait inférieure à celle du segment : ce qui remet en cause de qu'ils avaient l'habitude de faire.</p> <p><b>Difficultés possibles :</b> Si le segment = 1 bande-unité + 1/3 ou 1/5 (ou autre) de la bande unité ou que le rapport n'est pas fractionnaire, alors l'exercice sera très compliqué voire impossible à résoudre de cette manière.</p>
<b>VARIABLES</b>	<p>➔ <b>Rapport entre la longueur du segment et celle de la bande-unité.</b></p> <p>➔ <b>Nombre de bandes-unité</b> disponibles pour l'élève, le report étant plus facile à gérer lorsque les bandes unités peuvent être mises bout à bout.</p> <p>➔ <b>Possibilité de plier</b> les bandes de différentes façons car la tâche est ainsi facilitée.</p> <p>➔ <b>Longueur de la bande-unité</b> : plus celle-ci est longue, plus les partis obtenues par partage en 2, 3, 4 ou 5 peuvent être distinguées les unes des autres.</p>

### ➔ Passage des fractions aux nombres décimaux

L'objectif, pour les élèves, est de passer des fractions simples ( $1/2$  ;  $1/3$  ;  $1/4$  ;  $1/6$  ;  $1/8$ ) aux fractions décimales ( $1/10$  ;  $1/100$  ; ...) puis aux nombres décimaux exprimés par une écriture à virgule.

→ **Aide** : On peut alors utiliser un tableau de numération pour mettre en évidence qu'avec les nombres décimaux on retrouve le principe décimal positionnel (le chiffre a une valeur en fonction de son rang).

Centaines	Dizaines	Unités	Dixièmes	Centièmes	Millièmes
100	10	1	1/10	1/100	1/1000

### ➔ Nombres décimaux et système métrique

↳ Problèmes de **mesure de longueurs** ( $1\text{cm} = 1/100\text{ m}$  ;  $1\text{ dm} = 1/10\text{ m}$ ).

↳ Problèmes de **mesure des aires** ( $1\text{dm}^2 = 1/100\text{m}^2$  ;  $1\text{mm}^2 = 1/100\text{ cm}^2$ )

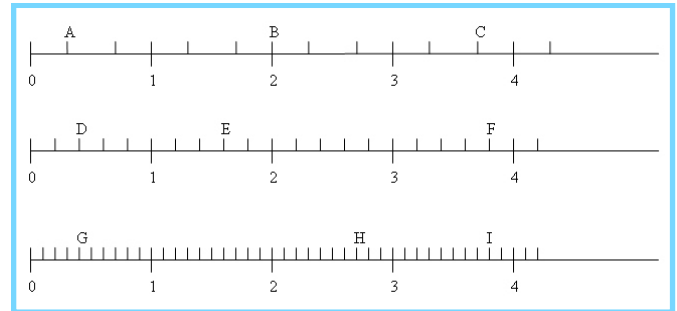
↳ Problèmes de **mesure des durées** ( $1\text{h}15 = 1\text{h} + 1/4\text{ d'heure}$ ) : plus délicat car les relations entre unités ne sont plus liées à des puissances de 10.

## ❖ FRACTIONS ET NOMBRES DECIMAUX POUR REPERER DES POINTS SITUES SUR UNE DROITE

« Les fractions et les nombres décimaux permettent d'**apporter des réponses à la question du repérage des points sur une ligne graduée**, dans le prolongement de ce qui est fait avec les nombres entiers ».

### EXEMPLE DE PROBLEME :

- Déterminer les fractions associées à différentes repères sur une droite graduée.
- Placer une fraction sur une droite graduée.



<b>PROCEDURES</b>	<p>→ Identifier la longueur unité (le segment qui relie le repère 1 au repère 2 par exemple).</p> <p>→ Puis identifier le type de partage de l'unité (en 2, en 5 graduations etc).</p>
<b>VARIABLES</b>	<p>→ Nombre de graduation entre deux unités.</p> <p>→ Proposer des fractions égales à des fractions plus simples (il faut que les élèves simplifient), etc.</p>

## ❖ FRACTIONS, NOMBRES DECIMAUX ET QUOTIENTS D'ENTRIERS

### ↳ Fractions et quotients d'entiers

#### EN CM :

La fraction  $\frac{4}{3}$  est liée au fait que l'on reporte 4 fois le tiers de l'unité.

Pour les élèves,  $\frac{4}{3}$  (lu « 4 tiers »), c'est 4 fois  $\frac{1}{3}$  ou encore  $\frac{4}{3} = 4 \times \frac{1}{3}$ .

#### EN 6EME :

Les élèves vont être confrontés à la résolution du problème suivant :  
« Trouver le nombre manquant :  $3 \times \dots = 4$  ». La fraction  $\frac{4}{3}$  est la solution.

### ↳ Nombres décimaux et quotients d'entiers

#### EXEMPLE DE PROBLEME :

- « Quelle est la longueur obtenue en partageant un fil de 132 cm en 48 morceaux identiques ? » (Le quotient 2,75 est un nombre décimal).
- « Quelle est la longueur obtenue en partageant 132 m en 46 morceaux identiques ? » (Le quotient n'est pas un nombre décimal mais il peut être approché au  $\frac{1}{10}$ ; au  $\frac{1}{100}$  etc).

Les élèves comprennent que les nombres décimaux fournissent des résultats aussi précis que l'on veut pour la valeur du quotient.

L'idée d'**approximation décimale** est envisagée dans des cas particuliers au cycle 3.

## ❖ TECHNIQUES DE COMPARAISON DES FRACTIONS ET DES NOMBRES DECIMAUX

Plusieurs techniques sont enseignées aux élèves :

- Comparer des fractions
- Comparer des nombres décimaux
- Intercaler des nombres entre deux autres
- Multiplier un nombre décimal par 10, 100...

→ Nous nous limitons ici à envisager la **comparaison des fractions** : qui ne fait l'objet que d'une **première approche** à l'école primaire ; et **celle des nombres décimaux** : qui occupe une **place importante** au cycle 3.

### ➔ Comparaison de fractions

Cas simples avec des fractions de mêmes dénominateurs ou pouvant s'y ramener facilement.

<b>PROCEDURES</b>	<ul style="list-style-type: none"><li>→ <b>Comparaison des deux numérateurs</b> si les dénominateurs sont égaux.</li><li>→ <b>Ramener les deux fractions au même dénominateur et comparer les numérateurs.</b></li></ul>
<b>ERREUR FREQUENTE</b>	→ <b><math>6/4 &gt; 3/2</math></b> parce que 6 et 4 sont plus grands que 3 et 2.
<b>AIDE</b>	→ <i>Représenter les fractions par des longueurs ou des aires ou les placer sur une droite graduée.</i>

### ➔ Comparaison de nombres décimaux

La comparaison des nombres décimaux occupe une place importante au cycle 3, les élèves apprennent un **algorithme de comparaison** de ces nombres exprimés à l'aide d'une écriture à virgule en étant placés dans des situations qui les conduisent à comprendre et à justifier les procédures utilisées.

<b>PROCEDURES</b>	<ul style="list-style-type: none"><li>→ <b>Placer les nombres les uns sous les autres</b> et commencer à comparer en partant de la gauche.</li><li>→ On compare les parties entières puis on met <b>toutes les parties décimales au même format.</b></li><li>→ On compare les parties entières puis on compte <b>successivement chaque chiffre situé à droite de la virgule.</b></li></ul>
<b>ERREURS FREQUENTES</b>	<ul style="list-style-type: none"><li>→ <b>Non prise en compte de la virgule</b> (<math>9,9 &lt; 9,19</math>)</li><li>→ <b>On compare les parties avant et après la virgule comme des entiers</b> à part entière (comme <math>19 &gt; 9</math>, alors <math>9,19 &gt; 9,9</math>).</li><li>→ <b>Tout nombre possède un successeur</b> (3,1 vient « juste après » 3).</li><li>→ <b>Seul un nombre avec 1 chiffre après la virgule peut suivre un nombre entier et précéder un nombre à 2 chiffres après la virgule</b> (<math>3 &lt; 3,1 &lt; 3,09</math>).</li><li>→ <b>Plus on va vers la droite, plus les chiffres ont une valeur faible</b> (<math>3,093 &lt; 3,09</math>).</li></ul>

## DESIGNATION DES FRACTIONS ET DES NOMBRES DECIMAUX

### ↳ Désignation des fractions

<b>COMPETENCES A ACQUERIR</b>	<p>→ Une première signification de l'écriture fractionnaire (<math>4/3</math> d'une unité = 4 report d'un tiers de l'unité).</p> <p>→ La lecture des fractions (avec les mots demi, tiers, quart... et en -ième).</p> <p>→ Le fait qu'une fraction peut être décomposée en partie entière et partie fractionnaire inférieure à 1 (<math>8/3 = 2 + 2/3</math>).</p>
<b>ERREURS FREQUENTES</b>	<p>→ Non différenciation du numérateur et du dénominateur (ex : <math>4/3 = 3/4</math>).</p> <p>→ Impossibilité à donner du sens aux fractions <math>&gt; 1</math> (les élèves ont l'habitude de travailler sur des exercices du type « Je coupe une tarte en 4 parts » et se retrouvent démunis quand il faut aborder une fraction du type <math>5/4</math>).</p> <p>→ Difficulté à saisir l'égalité entre les fractions (par exemple : <math>2/3 = 4/6</math> : ils pensent que <math>4/6 &gt; 2/3</math>).</p>

### ↳ Désignation des nombres décimaux

<b>COMPETENCES A ACQUERIR</b>	<p>→ L'écriture décimale avec une virgule : il s'agit de permettre aux élèves de comprendre que la valeur d'un chiffre dépend de la position qu'il occupe dans l'écriture et de maîtriser les relations qui existent entre des chiffres situés à des rangs différents, en particulier les relations avec l'unité.</p> <p>→ Les décompositions associées à cette écriture :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- <math>405,26 = 405 + 0,26</math> (qui fait apparaître la partie entière et la partie décimale).</li> <li>- <math>405,26 = 4 \times 100 + 5 + 2 \times 0,1 + 6 \times 0,01</math>.</li> </ul> <p>→ Les écritures utilisant des fractions décimale : <b>ex avec 405,26</b>  <math>405,26 = 405 + 26/100 = 405 + 2/10 + 6/100 = 4 \times 100 + 5 + 2/10 + 6/100 = 40526 / 100</math>.</p> <p>→ Les désignations verbales :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- en lecture courante → « quatre-cent-cinq virgule vingt-six » : ce type de lecture favorise les erreurs s'il est privilégié.</li> <li>- en lecture signifiante → « quatre-cent-cinq et vingt-six centièmes » ou « quatre-cent-cinq et six centièmes » : lecture privilégiée à l'école.</li> </ul>
<b>ERREURS FREQUENTES</b>	<p>→ Confusion entre écriture décimale et écriture fractionnaire : <math>2/10 = 2,10</math>.</p> <p>→ Ecriture décimale = 2 nombres entiers séparés par une virgule : <math>2,8 + 3,6 = 5,14</math>.</p> <p>→ Mauvaise maîtrise de la signification des chiffres en fonction du rang (ex : confusion dizaines et dixièmes, symétrie supposée entre le « avant » et le « après » la virgule ... ce qui place les dixièmes à la place des centièmes...).</p> <p>→ Dixièmes, centièmes = rangs et non « valeurs » (on ne sait pas que 1 dixième = <math>1/10^e</math> de l'unité).</p>

## CONCLUSION GENERALE

→ Toutes ces difficultés sont révélatrices des **conceptions que les élèves se sont forgées à propos des nombres décimaux**, dans le prolongement de leurs connaissances sur les naturels (nombre décimal pensé comme deux nombres entiers séparés par une virgule, comme ayant un successeur etc).

→ Ces difficultés sont aussi entretenues par **les lectures courantes du type « 2 virgule 54 » au lieu de « 2 et 54 centièmes »**, voire encore par la signification de la virgule dans les textes usuels.

→ Ces conceptions erronées peuvent avoir :

- **Une origine de type épistémologique** dans la mesure où les élèves prolongent naturellement sur les nombres décimaux certaines propriétés des entiers (règles d'action sur la comparaison par exemple).
- **Une origine de type didactique** provenant de choix d'enseignement.

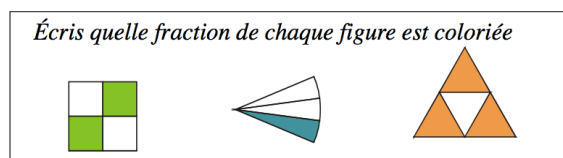
## Conceptions erronées à connaître

### ♥ LES FRACTIONS

- **Conception 1** : « Une fraction représente toujours une partie d'unité »

↳ C'est toujours le cas dans la vie courante.

↳ Conception favorisée par la résolution exclusive d'exercices du type :



↳ Les fractions supérieures à l'unité constituent un obstacle ( $5/4$  par exemple).

- **Conception 2** : « Une fraction c'est deux nombres séparés par un trait de fraction ».

↳ Cette conception est vide de sens.

↳ Elle apparaît souvent pour des fractions supérieures à l'unité.

↳ L'élève invente des règles purement formelles du type  $1/3 = 1,3$ .

### ♥ LES NOMBRES DECIMAUX

→ Les connaissances antérieures des élèves jouent un rôle important.

#### ↳ ENTIERS / DECIMAUX

→ Un entier a un successeur, un décimaux en a une infinité.

→ Entre deux entiers il n'y a aucun nombre entier → entre deux décimaux il y a une infinité de décimaux.

→ Plus un nombre entier a de chiffres, plus il est grand →  $1,001 < 1,1$ .

#### ↳ USAGES SOCIAUX

→ Les décimaux sont toujours écrits avec un nombre de décimales fixes : 20,50€ et non 20,5€.

→ Les décimaux ne sont pas employés pour les durées : 3h30 min et jamais 3,5h.

Ces notations renforcent l'idée que l'on peut appliquer à la partie entière et à la partie décimale les règles valables pour les entiers.

# Définitions à connaître

## ♥ LE NOMBRE DECIMAL

- Un nombre qui peut s'écrire sous la forme

$A$

$2^n \times 5^m$

- Définition à donner à des **CM2** :

Il n'y a pas de définition formelle du nombre décimal proposée aux élèves à l'école élémentaire, ceci ne sera fait qu'au collège.

Néanmoins le travail sur les nombres décimaux à l'école élémentaire s'appuie sur les notions suivantes, qui peuvent être considérées comme de premières définitions :

↳ Le nombre décimal est une fraction décimale ; le dénominateur de la fraction est égal à 10, 100, 1000 ...

↳ On peut écrire le nombre décimal de deux façons différentes : écriture fractionnaires, écriture à virgule.

## ♥ LE SENS DES FRACTIONS

Dès l'introduction des fractions en CM1, plusieurs sens de cette notion sont en jeu :

- **La fraction proportion/part de l'unité** : « Prendre les trois quarts d'une entité : une tarte, une bande unité etc. » (dès l'introduction des fractions).
- **La fraction nombre** : «  $3/4$  est un nombre compris entre 0 et 1 qu'il faut savoir situer sur une droite graduée. » (dès l'introduction des fractions).
- **La fraction opérateur** : « Prendre les trois quarts d'une mesure ou d'une quantité (par exemple : prendre les  $3/4$  de 60cm). » (dès le CM1).
- **La fraction division/quotient** : «  $3/4 = 3$  divisé par 4. » (à partir de la 6ème).